8 january 2014
corrections checked or marked
précédents

Que sont les formes modulaires de poids demi-entier? I. Revêtements du plan épointé

P. Deligne

Table des matières

1 Introduction

1.1 Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2. Le plan épointé $V^\bullet := V - \{0\}$ admet un revêtement double non trivial $\mathcal{R}$, unique à isomorphisme non unique près. Nous identifierons le groupe à deux éléments des automorphismes de $\mathcal{R}$ au groupe $\mu(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$ des racines de l'unité de $\mathbb{R}$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R})$ des automorphismes de la paire (espace vectoriel V, revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$) est une extension centrale

(1.1.1) $$\mu(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(V, \mathcal{R}) \to \mathrm{GL}(V)$$

du groupe $\mathrm{GL}(V)$ des automorphismes de l'espace vectoriel V par le groupe $\mu(\mathbb{R})$ des automorphismes du revêtement $\mathcal{R}$. A isomorphisme *unique* près, cette extension centrale ne dépend pas du choix de revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$. En effet, si $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sont deux revêtement doubles non triviaux de $V^\bullet$, l'isomorphisme de $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R}')$ avec $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R}'')$ induit par un isomorphisme de revêtements $\alpha : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$ ne dépend pas du choix de α. Pour $\mathcal{R}' = \mathcal{R}''$, ceci exprime que (1.1.1) est une extension centrale.

1.2 Nous nous proposons d'expliquer une variante purement algébriques de 1.1, où $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps commutatif quelconque K, et $\mu(\mathbb{R})$ par $K_2(K)$, et d'en déduire une autre variante où $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps local (autre que $\mathbb{C}$) et $\mu(\mathbb{R})$ par le groupe de ses racines de l'unité.

Soit V un espace vectoriel de dimension deux sur K, $V^\bullet := V - \{0\}$ et Λ un groupe abélien. En 2.3 nous définirons la notion de Λ-*revêtement* de $V^\bullet$. C'est un analogue algébrique de "revêtement muni d'une action de Λ qui est simplement transitive sur les fibres" (revêtement galoisien de groupe Λ, l'action de Λ étant donnée). Nous imposons de plus à nos Λ-revêtements d'être isomorphes à leurs transformés par les $g \in \mathrm{GL}(V)$. Le groupe des automorphismes d'un Λ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$ est réduit à Λ. Le groupe $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R})$ des automorphismes de la paire (espace vectoriel V, Λ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$) est donc une extension centrale

(1.2.1) $$\Lambda \to \mathrm{Aut}(V, \mathcal{R}) \to \mathrm{GL}(V).$$

Pour la même raison qu'en 1.1, l'extension centrale (1.2.1) de $\mathrm{GL}(V)$ par Λ ne dépend, à isomorphisme *unique* près, que de la classe d'isomorphie du Λ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$.

1.3 Nous établirons en 2.8 (si $K \neq \mathbb{F}_2$) une correspondance bijective entre les classes d'isomorphie de Λ-revêtement de $V^\bullet$ et les symboles à valeurs dans Λ. Rappelons qu'un *symbole* est (la loi de groupe de Λ étant notée multiplicativement) une application bimultiplicative

$$\{\cdot, \cdot\} : K^* \times K^* \to \Lambda$$

telle que

(1.3.1) $$\{u, v\} = 1 \text{ si } u + v = 1,$$

et que $K_2(K)$ est le réceptacle $K^* \otimes_{\mathbb{Z}} K^* / \langle u \otimes v \text{ pour } u + v = 1\rangle$ du symbole universel.

Si on prend pour $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de symbole le symbole universel, (1.2.1) devient une extension centrale

(1.3.2) $$K_2(K) \to \mathrm{GL}(V)^\sim \to \mathrm{GL}(V)$$

bien définie à isomorphisme *unique* près.

Si $K = \mathbb{R}$, un revêtement double non trivial $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$ comme en 1.1 a une structure naturelle (2.5) de $\mu(\mathbb{R})$-revêtement. Le symbole correspondant est le symbole localement constant universel de $\mathbb{R}$, donné par

(1.3.3)
$$\{x, y\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x, y < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4 Si $K \neq \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, le groupe $\mathrm{SL}(V)$ est son propre groupe des commutateurs. Il admet donc une extension centrale universelle

(1.4.1)
$$\pi_1(\mathrm{SL}(V)) \to \mathrm{SL}(V)^{\approx} \to \mathrm{SL}(V).$$

Moore [1] calcule $\pi_1(\mathrm{SL}(V))$ par générateurs et relations. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ agit sur $\mathrm{SL}(V)$ par conjugaison. Cette action se factorise par $\mathrm{PGL}(V)$ et induit une action de $\mathrm{PGL}(V)$ sur $\pi_1(\mathrm{SL}(V))$. La description [loc. cit. 9.2, p. 47] que Moore donne de $\pi_1(\mathrm{SL}(V))$ fournit un isomorphisme entre le groupe des coinvariants pour cette action et $K_2(K)$. Compatibilité : l'extension centrale de $SL(V)$ par $K_2(K)$ déduite de (1.4.1) est la restriction de (1.3.2) au sous-groupe $\mathrm{SL}(V)$ de $GL(V)$.

1.5 Il eût été possible de déduire nos résultats de ceux de Moore, en utilisant que $K^2 - \{0\}$ est un espace homogène sous $\mathrm{SL}(2, K)$, que le stabilisateur du point $(1, 0)$ est le groupe de transvections $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et que les droites ne passant pas par 0 du plan K^2 sont les orbites non réduites à un point des conjugués de ce groupe.

Travailler directement sur le plan rend les arguments plus géométriques, et travailler avec $\mathrm{GL}(2)$ plutôt qu'avec $\mathrm{SL}(2)$ apporte quelques simplifications. Montrer que le groupe des transvections $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ se relève canoniquement dans les extensions centrales est crucial pour nos arguments (cf. 2.13, 2.14) comme il l'était pour Steinberg [4] et Moore.

Notre motivation principale est une description dans le langage de la géométrie algébrique de ce que sont les formes modulaires de poids demi-entier. La deuxième partie de cet article y est consacrée. Elle a sa propre introduction. Indiquons seulement que la source des applications de ce qui précède aux formes de poids demi-entier est l'observation suivante. Soit V un espace vectoriel de dimension un sur $\mathbb{C}$. En tant que l'espace vectoriel réel, V est de dimension deux. Une *racine carrée* de V est un espace vectoriel L de dimension un sur $\mathbb{C}$, muni d'un isomorphisme $L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} V$. Si L est une racine carrée de V, l'application $\ell \mapsto \ell^{\otimes 2}$ de $L^\bullet := L - \{0\}$ dans $V^\bullet := V - \{0\}$ fait de $L^\bullet$ un revêtement double non trivial de $V^\bullet$, et cette construction

$$(\text{racines carrées}) \longrightarrow (\text{revêtements doubles non triviaux})$$

est une équivalence de catégories. En d'autres termes, si V comme en 1.1 est muni d'une structure complexe, il revient au même de se donner $\mathcal{R}$ comme en 1.1, ou une racine carrée de V.

1.6 Le §3 est consacré au cas où le corps K est un corps localement compact (un corps local). Dans ce cas, il est naturel de ne considérer que les symboles localement constants. Moore a montré qu'il existe un symbole localement constant universel : le symbole trivial si K est complexe, et le symbole de Hilbert, à valeurs dans le groupe $\mu(K)$ des racines de l'unité de K, sinon.

1.7 Au §4, K est un corps global, et nous exploitons la loi de réciprocité des symboles de Hilbert.

1.8 Terminologie Quand nous construirons un objet, ce sera toujours à isomorphisme unique près. Ceci signifie qu'on a un ensemble Σ de choix auxiliaires Σ, souvent laissé implicite, pour chaque σ dans Σ, un objet $X(\sigma)$, et un système transitif d'isomorphismes entre les $X(\sigma)$. Exemple : l'extension centrale de $\mathrm{GL}(V)$ par $\mu(\mathbb{R})$ définie en 1.1. Autres exemples : le "torseur défini~~e~~ par un cocycle", en 2.19, le "Λ-revêtement de symbole donné défini par un réseau", en 3.6 ou en 4.5.

2 Revêtements du plan épointé

2.1 Soit Λ un groupe. Rappelons qu'un Λ-*torseur* sur un ensemble X est un ensemble P muni de $f : P \to X$ et d'une action à droite de Λ, compatible à la projection sur X, et pour laquelle chaque fibre $P_x := f^{-1}(x)$ soit un Λ-torseur (= espace principal homogène). On dira que P est *constantifié* sur $Y \subset X$ si on s'est donné un système transitif d'isomorphismes de torseurs entre les fibres P_y pour y dans Y. Si tel est le cas, une section s de P sur Y sera dite *constante* si les $s(y)$ pour y dans Y se déduisent les uns des autres par ces isomorphismes. On notera $\Gamma_{\text{const}}(Y, P)$ l'ensemble des sections constante de P sur Y. C'est un Λ-torseur et, pour tout $y \in Y$, on a $\Gamma_{\text{const}}(Y, P) \xrightarrow{\sim} P_y$.

2.2 Soient K un corps commutatif, V un espace vectoriel de dimension 2 sur K, $V^\bullet := V - \{0\}$ et Λ un groupe abélien. Les *droites* du plan V sont les translatés des sous-espaces vectoriels de dimension un. Les *droites* de $V^\bullet$ sont les droites de V contenues dans $V^\bullet$. Nous considèrerons des objets du type suivant :

$$\text{un } \Lambda\text{-torseur } \mathcal{R} \text{ sur } V^\bullet \text{ constantifié sur chaque droite de } V^\bullet. \tag{2.2.1}$$

Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ agit sur l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets (2.2.1).

2.3 Définition. *Un* Λ-revêtement *de* $V^\bullet$ *est un objet* (2.2.1) *dont la classe d'isomorphie est fixe sous* $\mathrm{GL}(V)$.

Le groupe des automorphismes d'un objet (2.2.1) est réduit à Λ. En effet, les automorphismes de $\mathcal{R}$ en tant que Λ-torseur sont les applications $a : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, qui sur chaque $\mathcal{R}_x$ sont l'action d'un $\lambda(x)$ dans Λ, ce $\lambda(x)$ pouvant dépendre de x. Que a soit compatible aux constantifications signifie que $\lambda(x)$ est constant sur chaque droite de $V^\bullet$, donc est constant.

Comme en 1.1, si $\mathcal{R}$ est un Λ-revêtement de $V^\bullet$, le groupe des automorphismes de la paire (espace vectoriel V, Λ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$) est une extension centrale

$$\Lambda \to \mathrm{Aut}(V, \mathcal{R}) \to \mathrm{GL}(V) \tag{2.3.1}$$

et, à isomorphisme *unique* près, cette extension centrale ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\mathcal{R}$.

2.4 Terminologie Soit $\mathcal{R}$ un objet (2.2.1). Si D est une droite de $V^\bullet$ et que x, y sont des points de D, le *transport le long* de D, de $\mathcal{R}_x$ à $\mathcal{R}_y$, est l'isomorphisme donné par la constantification de $\mathcal{R}$ sur D. Une *ligne brisée* dans $V^\bullet$ de a à b est une suite de points $a_0 = a_1, \ldots, a_n = b$ et de droites D_i $(0 \leq i < n)$, la droite D_i étant contenue dans $V^\bullet$ et passant par a_i et a_{i+1}. Si $a_i \neq a_{i+1}$, D_i est donc la droite $a_i a_{i+1}$ passant par a_i et a_{i+1}. Le *transport le long* d'une telle *ligne brisée* est le composé des transports de $\mathcal{R}_{a_i}$ à $\mathcal{R}_{a_{i+1}}$ le long des D_i.

Si $a = b$, le transport le long de la ligne brisée est un automorphisme de $\mathcal{R}_a$; c'est donc l'action d'un élément m de Λ. On appellera une telle ligne brisée un *polygone dans* $V^\bullet$, de *sommets*

$a_0, \dots, a_{n-1}$ et de côtés $D_0, \dots, D_{n-1}$, et m la *monodromie* de $\mathcal{R}$ le long de ce polygone. Notons multiplicativement la loi de groupe de Λ et l'action de Λ sur $\mathcal{R}$. Si on indexe les sommets a_i et les côtés D_i d'un polygone par $\mathbb{Z}/n$, que pour chaque i on choisit $r_i \in \mathcal{R}_{a_i}$, et que m_i est l'élément de Λ tel que le transport de $\mathcal{R}_{a_i}$ à $\mathcal{R}_{a_{i+1}}$ le long de D_i, transforme r_i en $r_{i+1}.m_i$, alors la monodromie le long du polygone est le produit des m_i. En effet, ce produit ne dépend pas du choix des r_i et si on choisit $r_1, \dots, r_{n-1}$ de sorte que $m_i = 1$ pour $0 \leq i \leq n-2$, on retrouve la définition précédente. Cette description "homologique" montre de la monodromie est invariante par une permutation cyclique des sommets et côtés du polygone.

2.5 Exemple Prenons $K = \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{C}$. Soit $n > 1$. Notons $\mathcal{R}_n$ le revêtement $f : \mathbb{C}^* \to V^\bullet = \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$ de $V^\bullet$. La multiplication par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité en fait un μ_n-torseur sur $V^\bullet$. Ce μ_n-torseur a une structure (2.2.1) évidente : une droite D dans $V^\bullet$ étant contractile, $f^{-1}(D)$ est une réunion disjointe de copies de D, et ceci définit une constantification de $\mathcal{R}_n$ sur D. Une ligne brisée de a à b dans $V^\bullet$ définit une classe d'homotopie de chemins de a à b et le transport 2.4 le long de cette ligne brisée est l'isomorphisme de $\mathcal{R}_a$ avec $\mathcal{R}_b$ défini par cette classe. De même, un polygone dans $V^\bullet$ de sommets $a_0, \dots, a_{n-1}$ définit un élément de $\pi_1(V^\bullet, a_0)$, et la monodromie 2.4 coincide avec la monodromie au sens topologique.

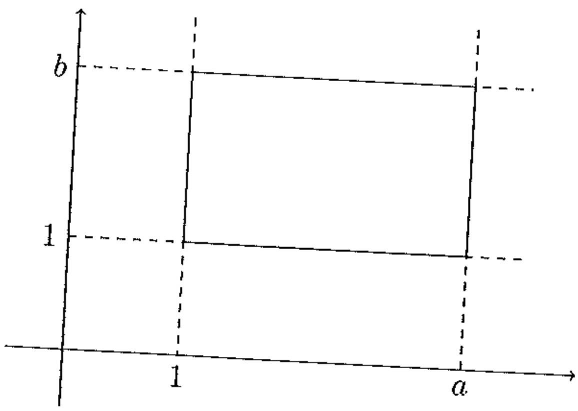
Le groupe fondamental de $V^\bullet$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. La monodromie du revêtement $\mathcal{R}_n$, muni de sa structure de μ_n-torseur, est un morphisme

$$\pi_1(V^\bullet, a) = H^1(V^\bullet, \mathbb{Z}) \to \mu_n,$$

indépendant du point base a. Le revêtement $\mathcal{R}_n$ étant connexe, ce morphisme est surjectif. Il détermine la classe d'isomorphie de $\mathcal{R}_n$, muni de sa structure de μ_n-torseur. Il n'est fixé par $\mathrm{GL}(V)$ que pour $n = 2$. En effet, les éléments de $\mathrm{GL}(V)$ de déterminant < 0 agissent sur $H^1(V^\bullet, \mathbb{Z})$ par multiplication par -1. Le groupe fondamental $\pi_1(V^\bullet, a)$ étant engendré par les images de polygones dans $V^\bullet$ partant de a, la classe d'isomorphie du revêtement $\mathcal{R}_n$, vu comme objet (2.2.1) détermine la monodromie topologique et donc la classe d'isomorphie de $\mathcal{R}_n$, muni de l'action de μ_n. Il en résulte que $\mathcal{R}_n$ n'est un μ_n-revêtement, au sens de 2.3, que pour $n = 2$.

2.6 Soit $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de $V^\bullet$. Choisissons un isomorphisme de V avec K^2 et, pour a, b dans K^*, considérons le rectangle à côtés parallèles aux axes de sommets successifs $(1,1)$, $(a,1)$, (a,b), $(1,b)$:

$(2.6)_{a,b}$



2.7 Définition. $\{a,b\}_{\mathcal{R}}$ *est la monodromie de* $\mathcal{R}$ *le long du rectangle* $(2.6)_{a,b}$.

Puisque les isomorphismes de V avec K^2 ne forment qu'une orbite sous $\mathrm{GL}(V)$, $\{a,b\}_{\mathcal{R}}$ ne dépend pas de l'isomorphisme choisi.

2.8 Notation: Si E est une extension centrale d'un groupe G par Λ, et que g, h sont des éléments de G, nous noterons $(g,h)_E$ le commutateur $g^\sim h^\sim g^{\sim -1} h^{\sim -1}$ de relèvements de g et h dans E. Il ne dépend pas du choix des relèvements. Si g et h commutent, $(g,h)_E$ est dans Λ. Si A et B sont deux sous-groupes de G et que les éléments de A commutent avec ceux de B, $(\cdot,\cdot)_E$ induit une application bimultiplicative de $A \times B$ dans Λ.

Prenons $V = K^2$, et soit $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de $V^\bullet$. La proposition suivante calcule $(g,h)_E$ lorsque E est l'extension centrale $\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})$ de $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(2,K)$ par Λ et que g et h sont des matrices diagonales ou que g est une matrice scalaire.

2.9 Proposition. *Avec les notations de 2.8,*

(i) si g et h sont les matrices diagonales $\mathrm{diag}(a',a'')$ *et* $\mathrm{diag}(b',b'')$, *le commutateur* $(g,h)_{\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})}$ *de relèvements de g et h dans l'extension centrale* (2.3.1) *vaut*

(2.9.1) $$\{a',b''\}_{\mathcal{R}}\{a'',b'\}_{\mathcal{R}}.$$

(ii) si g est la multiplication par a, quel que soit h dans $\mathrm{GL}(V)$, *le commutateur* $(g,h)_{\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})}$ *vaut*

(2.9.2) $$\{a, \det h\}_{\mathcal{R}}.$$

Preuve de (i). Notons E l'extension centrale $\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})$ de $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(2,K)$ par Λ. Le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}(2,K)$ qui fixe le point $(0,1)$ se relève en le sous-groupe de E qui fixe la fibre de $\mathcal{R}$ en ce point. En particulier, le groupe des $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ se relève, et

$$(\mathrm{diag}(a,1), \mathrm{diag}(b,1))_E = 1.$$

Par bimultiplicativité, ceci ramène (i) au cas particulier

(2.9.3) $$(\mathrm{diag}(a,1), \mathrm{diag}(1,b))_E = \{a,b\}_{\mathcal{R}}$$

et à son conjugué par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, qui permute les axes.

Prouvons (2.9.3). L'automorphisme $\mathrm{diag}(a,1)$ de V transforme la droite $x=1$ en la droite $x=a$, tandis que $\mathrm{diag}(1,b)$ transforme la droite $y=1$ en la droite $y=b$. Ce sont là les quatre côtés du rectangle $(2.6)_{a,b}$. Fixons r_0 dans $\mathcal{R}_{(1,1)}$. Soit s_1' (resp s_1'') la section constante de $\mathcal{R}$ sur la droite $x=1$ (resp $y=1$) qui passe par r_0. Soit s_a' (resp s_b'') la section constante de $\mathcal{R}$ sur la droite $x=a$ (resp $y=b$) qui coincide avec s_1'' (resp s_1') en $(a,1)$ (resp $(1,b)$). Par définition de la monodromie,

(2.9.4) $$s_a'((a,b)) = s_b''((a,b)).\{a,b\}_{\mathcal{R}}$$

(cf $(2.6)_{a,b}$). Soit $\mathrm{diag}(a,1)^\sim$ (resp $\mathrm{diag}(1,b)^\sim$) le relèvement de $\mathrm{diag}(a,1)$ (resp $\mathrm{diag}(1,b)$) qui envoie s_1' sur s_a' (resp s_1'' sur s_b''). Puisque $\mathrm{diag}(a,1)^\sim\mathrm{diag}(1,b)^\sim$ et $\mathrm{diag}(b,1)^\sim\mathrm{diag}(a,1)^\sim$ ont la même image dans $\mathrm{GL}(V)$, ils ne diffèrent que par multiplication par un élément de Λ. Calculons-le, en comparant les images de r_0. Pour $\mathrm{diag}(a,1)^\sim\mathrm{diag}(1,b)^\sim$, on a

$$r_0 = s_1''((1,1)) \mapsto s_b''((1,b)) = s_1'((1,b)) \mapsto s_a'((a,b))$$

tandis que pour $\mathrm{diag}(1,b)^{\sim}\mathrm{diag}(a,1)^{\sim}$, on a de même

$$r_0 \mapsto s''_b((a,b)).$$

Par (2.9.4), on a donc comme promis

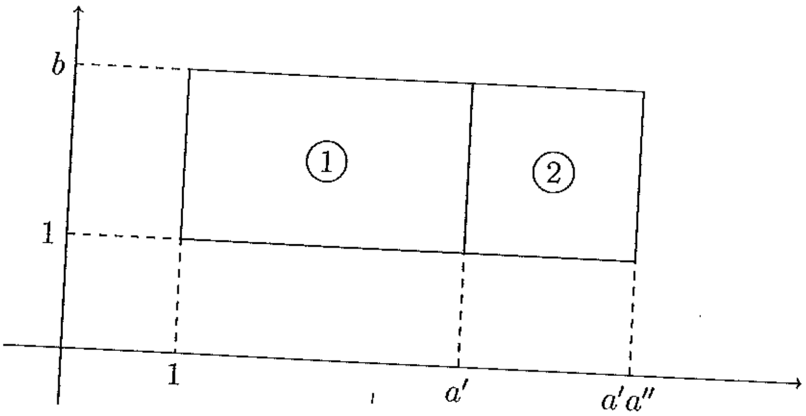
$$\mathrm{diag}(a,1)^{\sim}\mathrm{diag}(1,b)^{\sim} = \{a,b\}_{\mathcal{R}}\mathrm{diag}(1,b)^{\sim}\mathrm{diag}(a,1)^{\sim}. \tag{2.9.5}$$

Preuve de (ii). Notons a l'élément central $\mathrm{diag}(a,a)$ de $\mathrm{GL}(2,K)$. L'application $h \mapsto (a,h)_E$ est un homomorphisme de $\mathrm{GL}(2,K)$ dans Λ. Si $K = \mathbb{F}_2$, $a = 1$ et l'assertion (ii) est triviale. Sinon, $\mathrm{SL}(2,K)$ est le groupe des commutateurs de $\mathrm{GL}(2,K)$ et $h \mapsto (a,h)_E$ se factorise par le déterminant $\det : \mathrm{GL}(2,K) \to K^*$. La restriction du déterminant aux matrices diagonale étant surjective, il suffit de vérifier (ii) lorsque h est une matrice diagonale, et (ii) résulte de (i). □

La bimultiplicativité 2.8 de $(\cdot,\cdot)_E$ et (2.9.3) impliquent que $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ est bimultiplicatif :

2.10 Corollaire. *Pour tout Λ-revêtement $\mathcal{R}$, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}} : K^* \times K^* \to \Lambda$ est bimultiplicatif.*

Voici, pour $V = K^2$, une façon plus géométrique de présenter l'argument qui prouve 2.10. Pour a', a'' et b dans K^*, considérons les rectangles



Le rectangle ② est le transformé du rectangle $(2.6)_{a'',b}$ par $\mathrm{diag}(a',1)$, et a donc la même monodromie $\{a'',b\}_{\mathcal{R}}$. La monodromie du rectangle $(2.6)_{a'a'',b}$ "réunion" de ① et ② est le composé des monodromies de ces rectangles. C'est clair sur la description "homologique" 2.4 de la monodromie. On a donc

$$\{a'a'',b\}_{\mathcal{R}} = \{a',b\}_{\mathcal{R}}\{a'',b\}_{\mathcal{R}}. \tag{2.10.1}$$

Empilant les rectangles verticalement, on verrait de même que $\{a,b'b''\}_{\mathcal{R}} = \{a,b'\}_{\mathcal{R}}\{a,b''\}_{\mathcal{R}}$. On pourrait aussi le déduire de (2.10.1) et de ce que $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ transforme le rectangle $(2.6)_{a,b}$ en le rectangle $(2.6)_{b,a}$, pris avec l'orientation opposée, de sorte que

$$\{a,b\}_{\mathcal{R}} = \{b,a\}_{\mathcal{R}}^{-1}. \tag{2.10.2}$$

2.11 Théorème.

(i) Si $\mathcal{R}$ est un Λ-revêtement de $V^\bullet$, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ est un symbole.

(ii) Si $K \neq \mathbb{F}_2$, cette construction induit un isomorphisme du groupe des classes d'isomorphie de Λ-revêtements de $V^\bullet$ avec celui des symboles à valeurs dans Λ.

On appellera $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ le *symbole de* $\mathcal{R}$. D'après (ii), si $\{\cdot,\cdot\}$ est un symbole, l'extension centrale 2.3.1 pour $\mathcal{R}$ de symbole $\{\cdot,\cdot\}$ ne dépend, à isomorphisme unique près, que de $\{\cdot,\cdot\}$. On l'appellera *l'extension centrale de* $\mathrm{GL}(V)$ *par* Λ *définie par* $\{\cdot,\cdot\}$.

Il nous sera commode de noter additivement, et non plus multiplicativement, la loi de groupe de Λ et l'action de Λ sur un Λ-revêtement.

Plan de la preuve. Pour prouver (i), il reste à vérifier que $\{u,v\}_{\mathcal{R}} = 0$ si $u+v=1$. On peut supposer que $K \neq \mathbb{F}_2$, car si $K = \mathbb{F}_2$, il n'existe pas u et v dans K^* tels que $u+v=1$. La preuve sera donnée en 2.15. Il suffit de prouver (ii) pour $V = K^2$ et, plutôt que les Λ-revêtements, on peut considérer les Λ-revêtements munis de $r_0 \in \mathcal{R}_{(1,1)}$: cette rigidification élimine les automorphismes, mais ne change pas l'ensemble des classes d'isomorphie. En 2.16, nous montrerons comment reconstituer $(\mathcal{R}, r_0)$ à partir du symbole de $\mathcal{R}$. Ceci prouvera l'injectivité dans (ii). Nous donnerons en 2.19 et 2.20 deux preuves de ce que tout symbole provient d'un Λ-revêtement. La première est élémentaire. La seconde, plus instructive, montre que le symbole universel, à valeurs dans $K_2(K)$, provient d'un $K_2(K)$-revêtement.

2.12 Soit $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de $V^\bullet$. Soient V_1 un sous-espace vectoriel de dimension un de V et U le groupe des transvections parallèles à V_1. Si $V = K^2$, de coordonnées notées x et y, et que V_1 est le sous-espace $y=0$ de V, U est le sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}(2,K)$. Le groupe U fixe V_1, stabilise chaque droite parallèle à V_1 et agit sur une telle droite par une translation. Fixons un point $A \neq 0$ sur V_1. Par hypothèse, chaque $u \in U$ se relève en un automorphisme de $(V, \mathcal{R})$, unique à l'addition de $\ell \in \Lambda$ près. Nous noterons $\widetilde{u}$ le relèvement de u qui fixe $\mathcal{R}_A$, et $\widetilde{U}$ le groupe des $\widetilde{u}$ pour u dans U.

2.13 Lemme. *Si $K \neq \mathbb{F}_2$, et que $D \subset V^\bullet$ est une droite parallèle à V_1, le groupe $\widetilde{U}$ stabilise chaque section constante de $\mathcal{R}$ sur D.*

Preuve. Soit u dans U. Le relèvement $\widetilde{u}$ transforme section constante de $\mathcal{R}$ sur D en section constante. Soit m l'élément de Λ tel que $\widetilde{u}$ envoie une section constante s en $s+m$. Il ne dépend pas de s. La classe d'isomorphie de $\mathcal{R}$ étant fixe sous $\mathrm{GL}(V)$, m ne dépend que de la $\mathrm{GL}(V)$-orbite de (A,u,D). Le seul invariant de cette $\mathrm{GL}(V)$-orbite est le rapport $\frac{u(x)-x}{A}$ pour $x \in D$. Le vecteur t tel que u agisse sur D par $x \mapsto x+t$ est un multiple de A, et ce rapport est t/A. Il existe donc une fonction $\langle\cdot\rangle : K \to \Lambda$ telle que pour u dans U, x dans $V - V_1$ et r dans $\mathcal{R}_x$, si D est la droite passant par x parallèle à V_1, et que $u_{/\!/}(r)$ est déduit de r par transport de x à $u(x)$ le long de D, on ait

$$\widetilde{u}(r) = u_{/\!/}(r) + \left\langle \frac{u(x)-x}{A} \right\rangle. \tag{2.13.1}$$

Il nous faut montrer que, si $K \neq \mathbb{F}_2$ la fonction $\langle\cdot\rangle$ est nulle.

La fonction $\langle\cdot\rangle$ est additive. Ceci exprime que $(uv)^\sim = u^\sim v^\sim$. Soient $\beta \in K^*$, $B = \beta A$ et reprenons ce qui précède avec A remplacé par B. On obtient de nouveaux relèvements $\widetilde{u}'$ des $u \in U$, pour lesquels (2.3.1) est à remplacer par

$$\widetilde{u}'(r) = u_{/\!/}(r) + \left\langle \frac{u(x)-x}{\beta A} \right\rangle. \tag{2.13.2}$$

Quel que soit u dans U, les relèvements $\widetilde{u}$ et $\widetilde{u}'$ ne peuvent différer que par l'addition de $c \in \Lambda$. Si u n'est pas l'identité, les $\frac{u(x)-x}{A}$ pour $x \notin V_1$ prennent toutes les valeurs non ~~nuls~~. On a donc

(2.13.3)
$$\langle a/\beta \rangle = \langle a \rangle + c$$

pour tout $a \neq 0$ dans K. Si $K \neq \mathbb{F}_2$, il existe dans K a_1 et a_2 tels que a_1, a_2 et $a_1 + a_2$ soient non nulle. On a alors $\langle a_1 + a_2 \rangle = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle$, $\langle (a_1 + a_2)/\beta \rangle = \langle a_1/\beta \rangle + \langle a_2/\beta \rangle$. Appliquant (2.13.3) à a_1, a_2 et $a_1 + a_2$, on en déduit que $c = 0$. D'après (2.13.3), la fonction $\langle \cdot \rangle$ est donc constante sur K^*. Etant additive, elle est nulle. Pour r au-dessus de x dans $V - V_1$, on a donc

(2.13.4)
$$\widetilde{u}(r) = \widetilde{u}'(r) = u_{/\!/}(r).$$

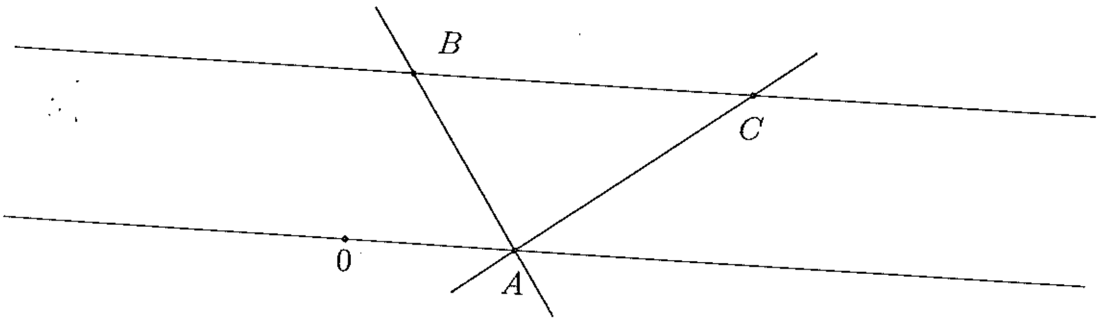
Il résulte de là que $\widetilde{u} = \widetilde{u}'$ et que $\widetilde{u}$ est l'identité au-dessus de tout point $B \neq 0$ de V_1. Ceci prouve le point (i) du □

2.14 Corollaire. *Supposons que $K \neq \mathbb{F}_2$. Dans ce cas,*

(i) Le relèvement $\widetilde{u}$ de u dans U ne dépend pas du choix de A. Il est l'identité au-dessus de $V_1 - \{0\}$. Si r est au-dessus de x dans $V - V_1$, $\widetilde{u}(r)$ est le transporté $u_{/\!/}(r)$ de r, de x à $u(x)$, le long de la droite D parallèle à V_1 par x.

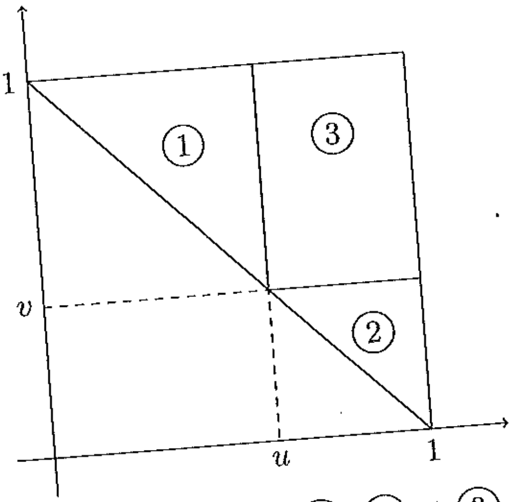
(ii) Soit ABC un triangle dont aucun côté ne contient 0. Si le côté BC est parallèle à $0A$, alors la monodromie de $\mathcal{R}$ le long de ABC est triviale.

Preuve de (ii). Soit u la transvection parallèle au sous-espace vectoriel V_1 engendré par A qui envoie B sur C.



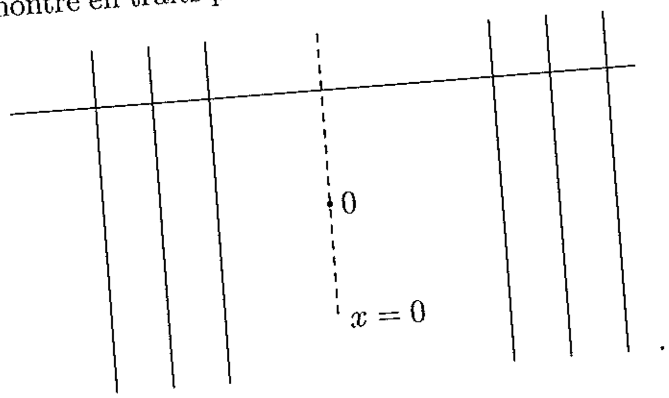
Soit s une section constante de $\mathcal{R}$ sur la droite AB. Le relèvement $\widetilde{u}$ de u envoie s sur la section constante t de $\mathcal{R}$ sur AC telle que $s(A) = t(A)$. Par (i), $t(C)$ est transporté de $s(B)$ le long de la droite BC. Ceci vérifie (ii). □

2.15 Preuve de ce que $\{u,v\}_{\mathcal{R}} = 0$ si $u+v=1$, pour $K \neq \mathbb{F}_2$. Supposons que $u+v=1$ et considérons

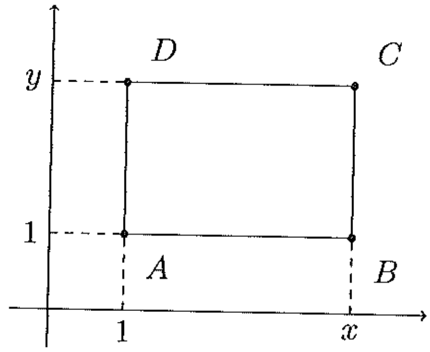


La monodromie le long du triangle T réunion de ①, ② et ③, i.e. $((1,0),(1,1),(0,1))$, est la somme des monodromies le long du triangle ①, du triangle ② et du rectangle ③ $= (2.6)_{u,v}$. D'après 2.14(ii), les monodromies le long de T, ① et ② sont triviales. Celle, $\{u,v\}$, le long de ③ l'est donc aussi : on a $\{u,v\}_{\mathcal{R}} = 0$.

2.16 Reconstitution de $\mathcal{R}$ On suppose que $V = K^2$ et que $K \neq \mathbb{F}_2$. Soit $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de $V^\bullet$, muni de $r_0 \in \mathcal{R}_{(1,1)}$. Montrons comment reconstituer $(\mathcal{R}, r_0)$ à partir du symbole $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{R}}$, que nous noterons simplement $\{\cdot,\cdot\}$. Soit U_1 (resp U_2) l'ouvert de V où $x \neq 0$ (resp $y \neq 0$). C'est la réunion des droites verticales $x = c$ (resp des droites horizontales $y = c$) pour $c \neq 0$. Soit s_1 (resp s_2) l'unique section de $\mathcal{R}$ sur U_1 (resp U_2) qui vaut r_0 en $(1,1)$, qui est constante sur la droite $y = 1$ (resp $x = 1$) et qui est constante sur les verticales $x = c$ (resp les horizontales $y = c$) pour $c \neq 0$. Le dessin suivant montre en traits pleins le peigne des droites sur lesquelles s_1 est par définition constante.



Soit $C = (x, y) \in U_1 \cap U_2$. Avec les notations du dessin suivant



$s_1(C)$ est le transporté de r_0 le long de ABC, et $s_2(C)$ le transporté de r_0 le long de ADC. Si $s_1(C) = s_2(C) + m$, m est donc la monodromie $\{x, y\}$ de $\mathcal{R}$ le long de $ABCD$. On a donc

(2.16.1) $$s_1 = s_2 + \{x, y\} \text{ en } (x, y).$$

Décrivons, sur chaque droite D dans $V^\bullet$, une section constante. Les autres sections constantes s'en déduiront par addition de $\ell \in \Lambda$. Si D est verticale (resp. horizontale), s_1 (resp. s_2) est constante. Supposons que D n'est ni verticale ni horizontale et soient $(a, 0)$ et $(0, b)$ les points d'intersection de D avec les axes.

2.17 Lemme. *La section s de $\mathcal{R}$ sur D définie par*

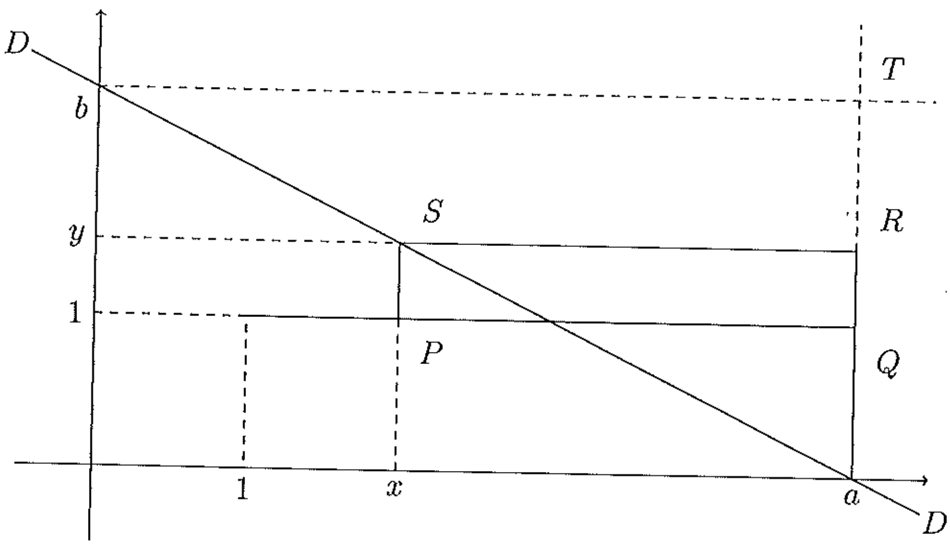
(2.17.1) $$s((a, 0)) = s_1((a, 0))$$

(2.17.2) $$s((0, b)) = s_2((0, b)) + \{a, b\}$$

(2.17.3) $$s((x, y)) = s_1((x, y)) - \{x/a, b\}$$

est constante.

Preuve. Montrons que l'unique section constante s de $\mathcal{R}$ sur D vérifiant (2.17.1) vérifie aussi (2.17.2), (2.17.3).



Avec les notations du dessin, la monodromie de $\mathcal{R}$ le long du triangle $(a,0)T(0,b)$ est triviale (2.14(ii)). La valeur de s en $(0,b)$ s'obtient donc en transportant $s_1((a,0))$ de $(a,0)$ à T, ce qui donne $s_1(T) = s_2(T) + \{a,b\}$, puis de T à $(0,b)$, ce qui donne (2.17.2).

Soit $S = (x,y)$ sur D, avec $x, y \neq 0$. D'après 2.14(ii), $s(S)$ se déduit de $s_1((a,0))$ par transport le long de $(a,0)RS$, soit encore par transport le long de $(a,0)QPS$, qui donne $s_1(S)$, suivi du transport le long du rectangle $SPQRS$, de monodromie $\{a/x, y\} = -\{x/a, y\}$. Ceci vérifie (2.17.3). $\square$

Si on permute le rôle des axes, le même argument montre que :

2.18 Lemme. *La section s' de $\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ sur D définie par*

(2.18.1) $$s'((0,b)) = s_2((0,b))$$

(2.18.2) $$s'((a,0)) = s_1((a,0)) + \{b,a\}$$

(2.18.3) $$s'((x,y)) = s_2((x,y)) - \{y/b, a\}$$

est constante.

2.19 Première preuve de ce que tout symbole provient d'un Λ-revêtement On suppose que $V = K^2$ et que $K \neq \mathbb{F}_2$. Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un symbole à valeurs dans Λ. Soit $\mathcal{R}$ le Λ-torseur sur $V^\bullet$ défini par le cocycle $\{x,y\}$. Par définition, il est muni de sections s_1 sur U_1 et s_2 sur U_2, et $s_1 = s_2 + \{x,y\}$ sur $U_1 \cap U_2$. Munissons $\mathcal{R}$ des constantifications sur les droites dans $V^\bullet$ telles que s_1 soit constante sur les verticales, s_2 sur les horizontales, et que sur D ni horizontale ni verticale comme en 2.16, la section s définie en 2.17 soit constante. Il suffit de montrer que l'objet de type (2.2.1) ainsi construit est un Λ-revêtement, c'est à dire que sa classe d'isomorphie est fixe sous $\mathrm{GL}(2,K)$.

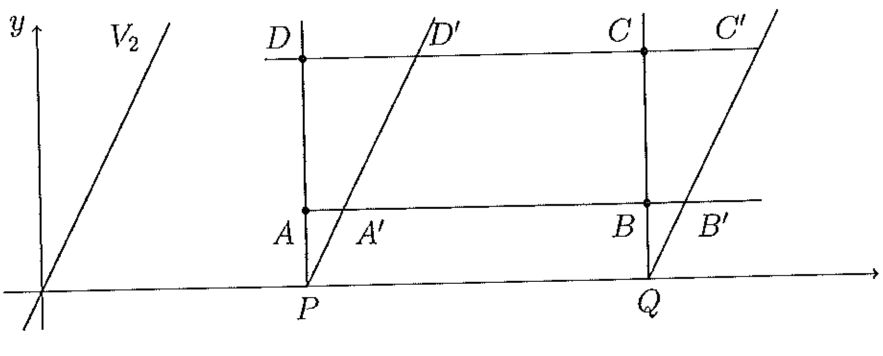
Reprenant la preuve de 2.17, on voit que $\mathcal{R}$ est caractérisé à isomorphisme unique près par les propriété (a) et (b) suivantes.

(a) Soient a, a', b, $b' \neq 0$ et R le rectangle de côtés parallèles aux axes $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$. La monodromie de $\mathcal{R}$ le long de R vaut $\{a'/a, b'/b\}$.

Par hypothèse, la section s_1 (resp s_2) est constante sur les côtés verticaux (resp horizontaux), et compte tenu de ce que $s_1 = s_2 + \{x,y\}$, (a) exprime la bimultiplicativité de $\{\cdot,\cdot\}$.

(b) Pour tout triangle ABC, avec A sur l'axe des x et BC parallèle èet axe, si aucun des côtés du triangle ne contient 0, la monodromie de $\mathcal{R}$ le long de ABC est triviale.

Montrons que (a) et (b) impliquent que (a) reste vrai quand l'axe des y est remplacé par une autre droite V_2 par 0, autre que l'axe des x. Cela équivaut à ce que si un parallélogramme $A'B'C'D'$ est déduit d'un rectangle $ABCD$ comme (a) par la transvection parallèle à l'axe des x qui amène l'axe des y sur V_2 $\mathcal{R}$ a la même monodromie le long de $A'B'C'D'$ que le long de $ABCD$



En effet, avec les notations du dessin, la monodromie est triviale le long de PAA' et PDD', donc autour de $AA'D'A$, et elle est de même triviale le long de $BB'C'C$.

Parce que $\{\cdot,\cdot\}$ est un symbole, la section s' de $\mathcal{R}$ sur D définie en 2.18 est constante, égale à $s-\{a,b\}$. En $(a,0)$ et $(0,b)$, cela résulte de ce que $\{\cdot,\cdot\}$ étant un symbole, on a $\{b,a\}=-\{a,b\}$. Vérifions-le en (x,y) avec $x,y\neq 0$. Le point (x,y) étant sur D, on a $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ et donc $\{\frac{x}{a},\frac{y}{b}\}=0$. Dès lors, on a en (x,y)

$$\begin{aligned} s'-s &= (s_2-\{y/b,x\})-(s_1-\{x/a,y\}) \\ &= (s_2-s_1)-(\{y,x\}-\{b,x\})+(\{x,y\}-\{a,y\}). \end{aligned}$$

Puisque $s_2-s_1=-\{x,y\}$ en (x,y), ceci vaut

$$\{x,y\}-\{x,b\}-\{a,y\}=\{x,y\}=\{x/a,y/b\}-\{a,b\}=-\{a,b\},$$

comme promis.

Il en résulte que $\mathcal{R}$ est aussi caractérisé par (a) et la propriété (b′) déduite de (b) en échangeant les axes. Si (a) et (b) sont vrais pour un choix d'axes, ils restent vrais non seulement quand on change l'axe des y, mais aussi quand on change l'axe des x : la validité de (a), (b) est indépendante du choix des axes. Que la classe d'isomorphie de $\mathcal{R}$ soit fixe sous $\mathrm{GL}(V)$ en résulte.

2.20 Preuve (moins élémentaire) de ce que le symbole universel provient d'un $K_2(k)$-revêtement Pour tout anneau A, nous noterons $K_n(A)$ le groupe K_n de Quillen de la catégorie exacte des A-modules projectifs de type fini. On a $K_0(K)=\mathbb{Z}$, $K_1(K)=K^*$, et le symbole universel

$$\{\cdot,\cdot\}:K^*\times K^*\to K_2(K)$$

est le produit en K-théorie.

Nous aurons à regarder l'espace vectoriel V de dimension 2 sur K comme un schéma sur K. Plus précisément, nous appellerons "schéma V" et noterons $\mathrm{sch}\,V$ le schéma affine $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}^*(V^\vee)$. L'ensemble des K-points de $\mathrm{sch}\,V$ s'identifie à V. La droite D de V d'équation linéaire $\ell(v)=0$ définit le sous-schéma fermé $\mathrm{sch}\,D$ de même équation de $\mathrm{sch}\,V$. L'ouvert de $\mathrm{sch}\,V$ complément de $\{0\}$ sera noté $\mathrm{sch}\,V^\bullet$. Pour $V=K^2$, $\mathrm{sch}\,V^\bullet$ est la réunion des ouverts $\mathrm{sch}\,U_1$ et $\mathrm{sch}\,U_2$ où x (resp y) est inversible.

Pour tout schéma S, nous noterons $\mathbf{K}_n$ le faisceau sur S, pour la topologie de Zariski, associé au préfaisceau $U\mapsto K_n(\mathcal{O}(U))$. En cas d'ambiguïté sur S, on écrira $\mathbf{K}_{nS}$.

Supposons S régulier de type fini sur K, et soit $\mathbb{A}$ l'espace affine de dimension d. Sherman [3] a montré que pour la projection $p:\mathbb{A}\times S\to S$, on

(2.20.1) $$p_*\mathbf{K}=\mathbf{K}_n \text{ et } R^ip_*\mathbf{K}_n=0 \text{ pour } i>0.$$

En particulier,

(2.20.2) $$H^0(\mathbb{A}^d,\mathbf{K}_n)=K_n(K) \text{ et } H^i(\mathbb{A}^d,\mathbf{K}_n)=0 \text{ pour } i>0.$$

Par ailleurs, si $i:T\hookrightarrow S$ est un sous-schéma régulier purement de codimension c, la résolution de Gers (Quillen [2] 5.11 p. 133) de $\mathbf{K}_n$ fournit

(2.20.3) $$R^ci^!\mathbf{K}_n=\mathbf{K}_{n-c} \text{ et } R^ji^!\mathbf{K}_n=0 \text{ si } j\neq c.$$

En particulier, si $\dim V = 2$,

$$H^2_{\{0\}}(\operatorname{sch} V, \mathbf{K}_2) = \mathbb{Z}$$

et autres $H^i_{\{0\}}$ sont nuls. La suite exacte longue de cohomologie pour $\{0\} \subset \operatorname{sch} V$ donne alors

$$H^0(\operatorname{sch} V^\bullet, \mathbf{K}_2) = K_2(K)$$
$$H^1(\operatorname{sch} V^\bullet, \mathbf{K}_2) = \mathbb{Z}$$

et la nullité des autres H^i. Les isomorphismes sont canoniques. Le groupe des automorphismes de $\operatorname{sch} V$ fixant 0 agit donc trivialement sur $H^*(\operatorname{sch} V^\bullet, \mathbf{K}_2)$. En particulier, $\mathrm{GL}(V)$ agit trivialement.

Prenons $V = K^2$ et soit $\mathbf{P}$ le $\mathbf{K}_2$-torseur sur $\operatorname{sch} V^\bullet = \operatorname{sch} U_1 \cup \operatorname{sch} U_2$ défini par le cocycle $\{x, y\}$ sur $\operatorname{sch} U_1 \cap \operatorname{sch} U_2$. On peut vérifier que sa classe de cohomologie est un générateur de $H^1(\operatorname{sch} V^\bullet, \mathbf{K}_2)$. Comme pour tout $\mathbf{K}_2$-torseur sur $\operatorname{sch} V^\bullet$, sa classe d'isomorphie est fixe sous $\mathrm{GL}(V)$.

Pour toute droite $D \subset V^\bullet$, $\mathbf{P}$ définit par image inverse un $\mathbf{K}_2$-torseur $\mathbf{P}_D$ sur $\operatorname{sch} D$, nécessairement trivial, et d'ensemble de trivialisations un $K_2(K)$-torseur.

Pour tout point rationnel v de $\operatorname{sch} V^\bullet$, i.e., pour tout $v \in V^\bullet$, $\mathbf{P}$ définit par image inverse un $K_2(K)$-torseur. Ces $K_2(K)$-torseurs, pour $v \in V^\bullet$, forment un $K_2(K)$-torseur $\mathbf{P}(K)$ sur $V^\bullet$, et les trivialisations des $\mathbf{P}_D$ pour $D \subset V^\bullet$ le munissent d'une structure (2.2.1). La classe d'isomorphie de $\mathbf{P}$ étant fixe sous $\mathrm{GL}(V)$, $\mathbf{P}(K)$ est un $K_2(K)$-revêtement de $V^\bullet$.

Il reste à vérifier que le symbole de $\mathbf{P}(K)$ est le symbole universel. Par construction, $\mathbf{P}$ est muni de sections s_1 sur $\operatorname{sch} U^1$ et s_2 sur $\operatorname{sch} U^2$, de différence le cocycle $\{x, y\}$. Relevons $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(V)$ en l'automorphisme $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^\sim$ de $(V^\bullet, \mathbf{P})$ tel que l'image de $s_1|_{x=1}$ soit $s_1|_{x=a}$. Relevons de même $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ pour que l'image de $s_2|_{y=1}$ soit $s_2|_{y=b}$. Le même calcul qu'en 2.9 montre que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^\sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^\sim$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^\sim \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^\sim$ diffèrent par $\{a, b\}$. Il reste à passer à $\mathbf{P}(K)$ et à appliquer 2.9.

2.21 Soient V' et V'' deux espaces vectoriels de dimension deux en dualité. Considérons la *relation d'incidence*

$$\langle v', v'' \rangle = 1$$

entre $V'^\bullet$ et $V''^\bullet$. L'ensemble des v' incidents à $v'' \in V''^\bullet$ est une droite $D(v'') \subset V'^\bullet$, et $v'' \mapsto D(v'')$ met en bijection $V''^\bullet$ avec l'ensemble des droites dans $V'^\bullet$. De même, en permutant les rôles de V' et V''. Pour $v' \in V'^\bullet$, la droite $D(v') \subset V''^\bullet$, vue comme ensemble de droites de $V'^\bullet$, est l'ensemble de celles qui passent par v'.

Soit $\mathcal{R}'$ un Λ-revêtement de V'. Pour chaque $v'' \in V''^\bullet$, $\Gamma_{\mathrm{const}}(D(v''), \mathcal{R}')$ (notation de 2.1) est un Λ-torseur. Ces torseurs sont les fibres d'un Λ-torseur $\mathcal{R}''$ sur $V''^\bullet$. Le Λ-torseur $\mathcal{R}''$ a une constantification naturelle sur les droites dans $V''^\bullet$: si x et y sont deux points de la droite $D(v') \subset V''^\bullet$, correspondant à des droites $D(x)$ et $D(y)$ de $V'^\bullet$ passant par v', on définit le transport le long de $D(v')$, de $\mathcal{R}''_x$ à $\mathcal{R}''_y$ comme étant

$$\mathcal{R}''_x = \Gamma_{\mathrm{const}}(D(x), \mathcal{R}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'_{v'} \xleftarrow{\sim} \Gamma_{\mathrm{const}}(D(y), \mathcal{R}') = \mathcal{R}''_y.$$

La construction étant $\mathrm{GL}(V')$-équivariante, et l'action de $\mathrm{GL}(V')$ sur V'' définissant un isomorphisme de $\mathrm{GL}(V')$ avec $\mathrm{GL}(V'')$, on obtient ainsi un Λ-revêtement de $V''^\bullet$.

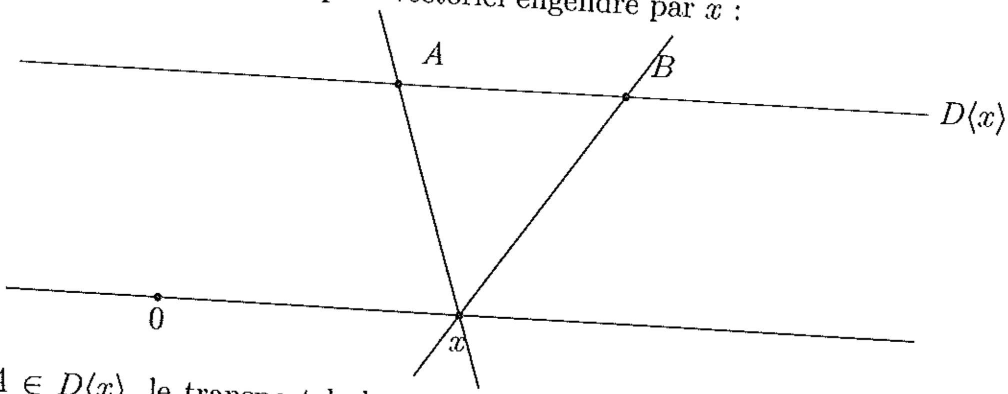
Une forme symplectique ψ sur V' définit un isomorphisme $v' \mapsto \psi(v', \cdot)$ de V' avec son dual V''.

2.22 Construction d'un prolongement de l'isomorphisme $v' \mapsto \psi(v', \cdot) : V' \xrightarrow{\sim} V''$ en un isomorphisme de $(V', \mathcal{R}')$ avec $(V'', \mathcal{R}'')$.

Il s'agit de construire un isomorphisme de Λ-revêtements entre $\mathcal{R}'$ et l'image inverse de $\mathcal{R}''$ par $v' \mapsto \psi(v', \cdot)$. Notons encore $\mathcal{R}''$ cette image inverse et, pour x dans $V'^{\bullet}$, notons $D\langle x \rangle$ la droite $\{y \mid \psi(x, y) = 1\}$. Avec ces notations,

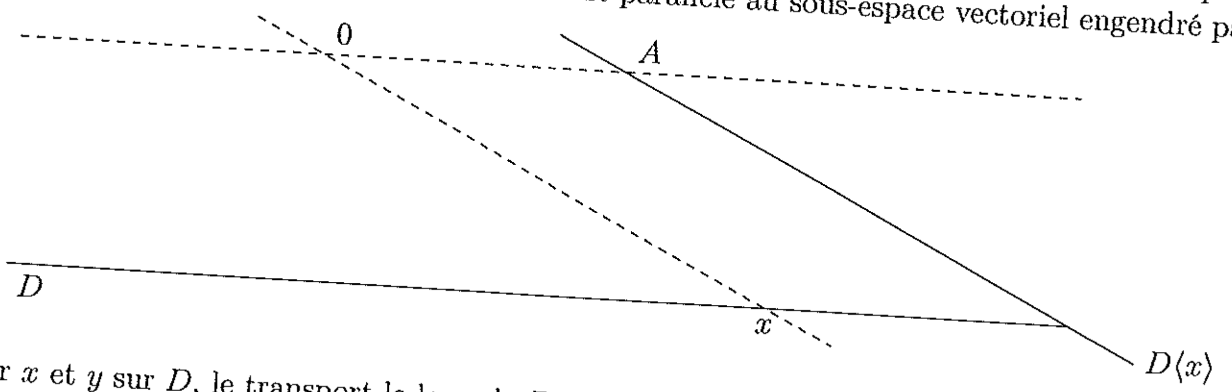
$$\mathcal{R}''_x = \Gamma_{\mathrm{const}}(D\langle x \rangle, \mathcal{R}').$$

La droite $D\langle x \rangle$ est parallèle à l'espace vectoriel engendré par x :



Pour tout $A \in D\langle x \rangle$, le transport le long de la droite xA définit un isomorphisme $\varphi_A : \mathcal{R}'_x \to \mathcal{R}'_A$. Pour $r \in \mathcal{R}'_x$ et A variable, les $\varphi_A(r)$ sont une section constante de $\mathcal{R}'$ sur $D\langle x \rangle$ (2.14(ii)). Ceci définit un isomorphisme de Λ-torseur $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$. Il reste à montrer qu'il est compatible aux constantifications.

Soit D une droite dans $V'^{\bullet}$. Si $D = \{x \mid \psi(x, A) = 1\}$, les droites $D(x)$ pour $x \in D$ passent toutes par le point A de $V'^{\bullet}$, et la droite D est parallèle au sous-espace vectoriel engendré par A.



Pour x et y sur D, le transport le long de D de $\mathcal{R}''_x$ à $\mathcal{R}''_y$ est

$$\mathcal{R}''_x = \Gamma_{\mathrm{const}}(D\langle x \rangle, \mathcal{R}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'_A \xleftarrow{\sim} \Gamma_{\mathrm{const}}(D\langle y \rangle, \mathcal{R}') = \mathcal{R}''_y.$$

Par définition de l'ismorphisme de $\mathcal{R}'_x$ avec $\mathcal{R}''_x$, le composé

$$\mathcal{R}'_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}''_x \to \mathcal{R}'_A$$

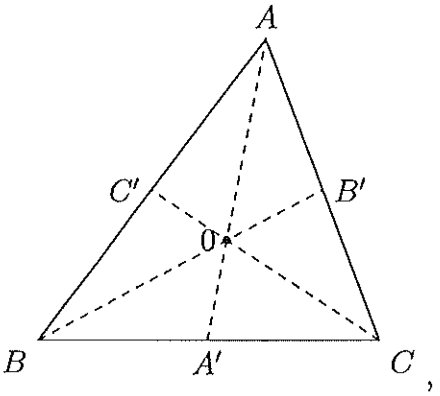
coïncide avec le transport le long de la droite xA, et que l'isomorphisme de $\mathcal{R}'$ avec $\mathcal{R}''$ soit compatible au transport le long de D, de x à y

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}'_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}''_x \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& & \mathcal{R}'_A \\
\mathcal{R}'_y \arrow[r] & \mathcal{R}''_y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

est un application de 2.14(ii).

2.23 Soit ABC un triangle à sommets distincts de $V^\bullet$. Il existe (a,b,c), unique à un facteur près, tel que $aA+bB+cC=0$. L'hypothèse que les côtés du triangle ne passent pas par 0 s'écrit a, b, $c \neq 0$. Supposons que A, B, et C ne soient pas sur une même droite, i.e. que $a+b+c\neq 0$. Si a, b, et c sont normalisés pour être de somme un, ce sont les coordonnées barycentrique de 0 dans le triangle ABC.

Avec les notations de dessin suivant

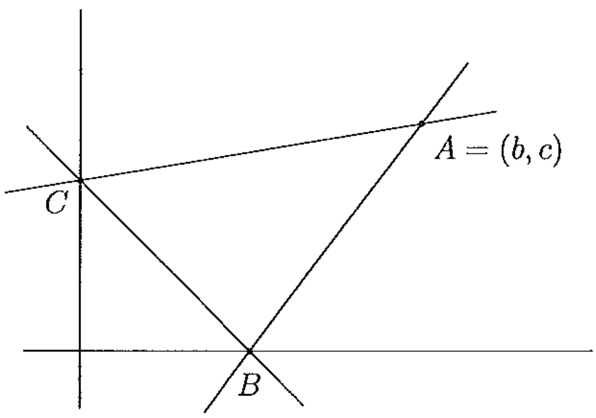


les rapports entre vecteurs $\alpha := A'C/A'B$, $\beta := B'A/B'C$, $\gamma := C'B/C'A$ sont $-b/c$, $-c/a$, $-a/b$, et $\alpha\beta\gamma = -1$ (théorème de Ceva). Pour tout symbole $\{\cdot,\cdot\}$, on a $\{x,y\} = -\{x,y\}$ et $\{x,x\} = \{-1,x\}$. On a donc

$$\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\gamma\} = \{\gamma,\alpha\} = \{a,b\}+\{b,c\}+\{c,a\}+\{-1,-abc\}. \tag{2.23.1}$$

2.24 Proposition. *Si $\mathfrak{R}$ est un Λ-revêtement de $V^\bullet$ de symbole $\{\cdot,\cdot\}$, la monodromie de $\mathfrak{R}$ le long du triangle ABC est donnée par* (2.23.1).

Preuve. On peut supposer que $V=K^2$, que $A=(b,c)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$ et que $(a,b,c) = (-1,b,c)$, auquel cas (2.23.1) vaut $\{b,c\}$.



On peut aussi prendre $\mathfrak{R}$ décrit comme en 2.16 et 2.17. Sur la droite BC, s_1 (hors C) et s_2 (hors B) forment une section constante. D'après (2.17.3), la section constante sur AB de valeur $s_1(B)$ en B vaut $s_1 - \{b,c\} = s_2$ en A. De même, la section constante sur AC de valeur $s_2(C)$ en C ~~est~~ vaut $s_1(A)$ en A. On conclut par (2.16.1). □

3 Corps locaux

3.1 Soient V un espace vectoriel de dimension 2 sur K et $\mathcal{R}$ un Λ-revêtement de $V^\bullet$. Nous noterons multiplicativement la loi de groupe de Λ et l'action de Λ sur $\mathcal{R}$. Supposons que K soit un corps topologique et que le symbole de $\mathcal{R}$ soit localement constant. Dans ce cas, $\mathcal{R}$ et l'extension $\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})$ de $\mathrm{GL}(V)$ par Λ ont une topologie naturelle, $\mathcal{R}$ est un revêtement de $V^\bullet$, et $\mathrm{Aut}(V,\mathcal{R})$ un revêtement de $\mathrm{GL}(V)$. La topologie de $\mathcal{R}$ est celle pour laquelle, pour tout isomorphisme $(x,y) : V \to K^2$ et tout $r_0 \in \mathcal{R}_{(1,1)}$, les sections s_1 et s_2 de $\mathcal{R}$ sur les ouverts $x \neq 0$ et $y \neq 0$, définies en 2.16, sont continues d'image ouverte.

3.2 Supposons K localement compact non discret (un *corps local*). Si $K = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ est connexe et tout symbole localement constant est trivial. Supposons K non isomorphe à $\mathbb{C}$. On dispose alors du symbole de Hilbert $(\cdot,\cdot)$, à valeurs dans le groupe $\mu(K)$ des racines de l'unité de K. C'est le symbole localement constant universel. D'après Moore [1] Théorème 3.1, p. 18, il est même universel parmi les symboles continus à valeurs dans un groupe abélien localement compact.

Pour μ un sous-groupe de $\mu(K)$, nous noterons $(\cdot,\cdot)_\mu$ le symbole de Hilbert élevé à la puissance $[\mu(K):\mu]$. Il est à valeurs dans μ. Si $|\mu| = n$, il sera aussi noté $(\cdot,\cdot)_n$. Pour K complexe, on définit $(\cdot,\cdot)_\mu$ et $(\cdot,\cdot)_n$ comme étant le symbole trivial.

3.3 Supposons que K soit un corps local non archimédien. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau de sa valuation ν, $k = \mathcal{O}/m$ son corps résiduel et $q := |k|$. On a $\mu_{q-1}(K) \xrightarrow{\sim} k^*$ et $(\cdot,\cdot)_{q-1}$, vu comme étant à valeurs dans k^*, est, à un signe près dépendant des conventions suivies, le *symbole modéré*.

(3.3.1) $$\{f,g\}_{\mathrm{mod}} = \text{réduction mod}\, m \text{ de } (-1)^{\nu(f)\nu(g)} f^{\nu(g)} g^{-\nu(f)}.$$

Un Λ-revêtement sera dit *modéré* si son symbole se factorise par le symbole modéré. Une *réseau* de V est un sous-$\mathcal{O}$-module libre de rang 2. Si T est un réseau de V, on a $T \otimes_{\mathcal{O}} K \xrightarrow{\sim} V$.

Notation: $T_k := T \otimes_{\mathcal{O}} k = T/mT$, et $T^\bullet$ est l'image inverse $T \setminus mT$ de $T_k^\bullet := T_k - \{0\}$ dans T (cf. 4). Une *droite* de T est un translaté d'un facteur direct de rang un. Si D est une droite de T, on notera D_k la droite de T_k image de D, est D_K l'unique droite de V contenant D. Une *droite de* $T^\bullet$ est une droite de T contenue dans $T^\bullet$.

Comme en 2.19, si $T^\vee$ est le $\mathcal{O}$-dual de T, l'application $t' \mapsto \{t \in D \mid \langle t',t\rangle = 1\}$ est une bijection de $T^{\vee\bullet}$ avec l'ensemble des droites de $T^\bullet$.

3.4 Proposition. *Avec les notations de 2.3, un revêtement modéré $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$ admet sur $T^\bullet$ une unique constantification qui, pour toute droite de $T^\bullet$, est compatible avec la constantification de $\mathcal{R}$ sur D_K.*

Preuve. L'unicité résulte de ce que deux points a, b de $T^\bullet$ peuvent toujours être reliés par une ligne brisée $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$, avec $a_i \in T^\bullet$ telle que chaque droite $a_i a_{i+1}$ soit engendrée par une droite de $T^\bullet$. L'existence exprime que si $a = b$, la monodromie de $\mathcal{R}$ le long d'un tel polygone $a_0 \cdots a_{n-1}$ est triviale. Pour prouver l'existence, on peut supposer que $V = K^2$ et que $T = \mathcal{O}^2$. Dans ce cas, avec les notations de 2.16, s_1 et s_2 coincident sur $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$, car le symbole modéré est trivial sur $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$. Soit s la section de $\mathcal{R}$ sur $T^\bullet$ qui coïncide avec s_1 sur $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}$ et avec s_2 sur $\mathcal{O} \times \mathcal{O}^*$. La constantification requise est celle pour laquelle la section s est constante. La preuve qu'elle convient est laisée au lecteur (cf. les formules de 2.16). □

laissée

3.5 Corollaire-construction. *Si le revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$ est modéré, l'extension centrale* $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R})$ *de* $\mathrm{GL}(V)$ *par* Λ *est canoniquement scindée sur* $\mathrm{GL}(T)$.

Le sous-groupe $\mathrm{GL}(T)$ de $\mathrm{GL}(V)$ se relève en le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V, \mathcal{R})$ qui fixe les sections constantes, au sens de 3.4, de $\mathcal{R}$ sur $T^\bullet$.

3.6 Corollaire. *Si le symbole localement constant $\{\cdot,\cdot\}$ est modéré, i.e., se factorise par* (3.3.1), *il existe un revêtement $\mathcal{R}$ de $V^\bullet$, unique à isomorphisme unique près, de symbole $\{\cdot,\cdot\}$ et trivialisé sur $T^\bullet$, c'est à dire muni d'une section s au-dessus de $T^\bullet$, constante au sens de 3.4.*

Un réseau T de V définit par 3.6 un Λ-revêtement $\mathcal{R}$ de symbole $\{\cdot,\cdot\}$. Si T' est un autre réseau, image de T par $g \in \mathrm{GL}(V)$, et que $\mathcal{R}'$ est le Λ-revêtement correspondant, les isomorphismes entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ correspondant biunivoquement aux relèvements de g dans l'extension centrale de $\mathrm{GL}(V)$ par Λ définie par $\{\cdot,\cdot\}$ (2.11).

3.7 Si le symbole $\{\cdot,\cdot\}$ est tel que $\{x,y\} = 1$ pour $x, y \in \mathcal{O}^*$ et $x \equiv 1 \ (m^n)$, il reste vrai que si $\mathcal{R}$ est un Λ-revêtement de symbole $\{\cdot,\cdot\}$, pour tout réseau T, et chaque translaté C de m^nT contenu dans $T^\bullet$, $\mathcal{R}$ a un constantification naturelle (dépendant de T) sur C, de sorte que (T, C) défini un Λ-revêtement de $V^\bullet$ de symbole $\{\cdot,\cdot\}$, et que l'extension centrale de $\mathrm{GL}(V)$ par $\mathrm{GL}(V)$ par Λ définie par $\{\cdot,\cdot\}$ se scinde sur les sous-groupe de $\mathrm{GL}(T)$ qui stabilise C.

Exemple. Si $K = \mathbb{Q}_2$ et que $\{\cdot,\cdot\}$ est le symbole $(\cdot,\cdot)_2$, on peut prendre pour C une classe latérale de $4T$ contenue dans T.

4 Corps globaux

4.1 Soient K un corps global et μ le groupe de ses racines de l'unité. On identifie μ à un groupe de racines de l'unité de chaque complété K_v de K. Notons $(\cdot,\cdot)_v$ le symbole $(\cdot,\cdot)_\mu$ de K_v. Nous nous proposons d'exploiter la loi de réciprocité de Hilbert selon laquelle, quels que soient x et y dans K^*, on a

$$\prod_v (x,y)_v = 1. \tag{4.1.1}$$

4.2 Comme en 2.18, si V est un module projectif de type fini sur un anneau commutatif A, on peut "regarder V comme un schéma sur $\mathrm{Spec}(A)$", c'est à dire considérer le schéma $\mathrm{sch}\, V := \mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}^*(V^\vee)$, dont l'ensemble des A-points (les sections de $\mathrm{sch}\, V$ sur $\mathrm{Spec}(A)$) s'identifie à V. Soit $\mathrm{sch}\, V^\bullet$ déduit de $\mathrm{sch}\, V$ en enlevant la section 0. L'ensemble $V^\bullet$ des A-points de $\mathrm{sch}\, V^\bullet$ est l'ensemble des $v \in V$ pour lesquels il existe v' dans le dual de V tel que $\langle v', v\rangle = 1$. Comme cas particulier, on retrouve la définition de $T^\bullet$ donnée de façon ad hoc en 3.3.

Supposons V localement libre de rang 2. Comme en 3.3, une *droite* de V est un translaté d'un facteur direct localement libre de rang un, et une *droite* de $V^\bullet$ est un droite de V contenue dans $V^\bullet$: donnée par une équation $\langle v', v\rangle = 1$ pour un $v' \in V^\vee$.

Le cas qui nous importe est celui où A est l'anneau $\mathbb{A}$ des adèles de K. Cet anneau est le produit restreint des K_v relativement aux $\mathcal{O}_v$, définis pour v non archimédien. Les V de rang 2 comme ci-dessus sont les produits restreints d'espaces vectoriels V_v de dimension 2 sur les K_v, relativements à des réseaux T_v (donnés pour presque tout v), et $V^\bullet$ est le produit restreint des $V_v^\bullet$ relativement aux $T_v^\bullet$.

4.3 Soit $V_{\mathbb{A}}$ un $\mathbb{A}$-module libre de rang 2, produit restreint des V_v, relativement à des réseaux T_v. Nous nous intéresserons aux μ-torseurs sur $V_{\mathbb{A}}^\bullet$, constantifiés sur chaque droite D de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$, obtenus par la construction suivante.

On part de la donnée, pour tout v, d'un μ-revêtement $\mathcal{R}_v$ de $V_v^\bullet$, de symbole $(\cdot,\cdot)_v$, et, pour presque tout v, d'une trivialisation τ_v de $\mathcal{R}_v$ sur $T_v^\bullet$, c'est à dire d'une section de $\mathcal{R}_v$ sur $T_v^\bullet$, constante au sens de 3.4. Soit S un ensemble fini de places, assez grand pour que T_v et τ_v soient définis pour $v \notin S$. Notons $\mathcal{R}_S$ le μ-torseur sur $\prod_{v \notin S} T_v^\bullet \times \prod_{v\in S} V_v^\bullet$ somme des images inverses des $\mathcal{R}_v$ pour $v \in S$. Sa fibre en un point (x_v) est le quotient de $\prod_{v\in S}(\mathcal{R}_v)_{x_v}$ par l'action de noyau ker(produit : $\mu^S \to \mu$). Il est constantifié sur tout produit de droites des $T_v^\bullet$ et des $V_v^\bullet$. Si $S' \supset S$, les τ_v pour $v \in S' - S$ font de $\mathcal{R}_{S'}$ un prolongement de $\mathcal{R}_S$. Par passage à la limite inductive, on obtient un μ-torsuer $\mathcal{R}$ sur $V^\bullet$, *somme* des images inverse de $\mathcal{R}_v$, et constantifié sur chaque droite de $V^\bullet$.

Les $\mathcal{R}$ ainsi obtenues sont les *μ-revêtements* de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$. On peut repéter cette définition avec $\mathbb{A}$ remplacé par n'importe quel produit restreint de K_v, par exemple l'anneau $\mathbb{A}^f$ des adèles finis, produit restreint des K_v non archimédiens.

4.4 Supposons que $K = \mathbb{Q}$. On a $\mu = \mu_2$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^f \times \mathbb{R}$, $V_{\mathbb{A}}$, libre de rang 2 sur $\mathbb{A}$, est un produit $V_{\mathbb{A}^f} \times V_{\mathbb{R}}$, et un μ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$ est la somme $\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_\infty$ des images inverses d'un μ_2-revêtement $\mathcal{R}_f$ de $V_{\mathbb{A}^f}$, au sens de 4.3, et d'un μ_2-revêtement $\mathcal{R}_\infty$ de $V_{\mathbb{R}}^\bullet$ de symbole $(\cdot,\cdot)_2$. Ce dernier s'identifie à un revêtement double non trivial de $V_{\mathbb{R}}^\bullet$, cf 1.1, 1.3 et 2.5.

Un μ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$ définit un foncteur des μ-revêtements $\mathcal{R}_f$ de $V_{\mathbb{A}^f}^\bullet$ dans les revêtements doubles non-triviaux 1.1 de $V_{\mathbb{R}}^\bullet$: à $\mathcal{R}_f$ associer un μ_2-revêtment $\mathcal{R}_\infty$ de $V_{\mathbb{R}}^\bullet$, muni d'un isomorphisme $\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$. Un tel $\mathcal{R}_\infty$ est unique à isomorphisme unique près, son symbole est $(\cdot,\cdot)_2$ et on prend le revêtement double non trivial correspondant.

Cette construction : μ-revêtements $\to$ foncteurs est un équivalence de catégories.

4.5 Avec les notations de 4.3, un *réseau rationnel* $V_K \subset V_{\mathbb{A}}$ est un sous-K-espace vectoriel tel que $V_K \otimes_K \mathbb{A} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{A}}$. La loi de réciprocité de Hilbert (4.1.1) assure que la restriction à $V_K^\bullet$ d'un μ-revêtement $\mathcal{R}$ de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$ est un μ-revêtement de $V_K^\bullet$ de symbole trivial, admettant donc des sections constantes sur chaque droite de $V_K^\bullet$. Une telle section, appelée trivialisation de $\mathcal{R}$ sur $V_K^\bullet$, rigidifie $\mathcal{R}$: il existe un μ-revêtement de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$, unique à isomorphisme unique près, trivialisé sur $V_K^\bullet$.

En d'autres termes (cf (3.5)), un réseau rationnel définit un μ-revêtement sur $V_{\mathbb{A}}^\bullet$. Dans le cas particulier considéré en 4.4, il définit un foncteur des μ_2-revêtements de $V_{\mathbb{A}^f}^\bullet$ dans les revêtements doubles non trivial 1.1 de $V_{\mathbb{R}}^\bullet$.

4.6 Soit V de dimension 2 sur K, $V_{\mathbb{A}} := V \otimes_K \mathbb{A}$, et $\mathcal{R}$ un μ-revêtement de $V_{\mathbb{A}}^\bullet$. Le groupe des automorphismes de la paire ($\mathbb{A}$-module $V_{\mathbb{A}}$, μ-revêtement $\mathcal{R}$) est une extension centrale de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}})$ par μ, indépendante, à isomorphisme unique près, du choix de $\mathcal{R}$. C'est la somme de Baer des extensions centrales de $\mathrm{GL}(K_v)$ par μ, définies par le symbole $(\cdot,\cdot)_v$ (2.11), cette somme ayant un sens car pour presque tout v cette extension centrale de $\mathrm{GL}(K_v)$ par μ est canoniquement scindée sur $\mathrm{GL}(\mathcal{O}_v)$. Le sous-groupe $\mathrm{GL}(V)$ de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{A}})$ se relève dans cette extension centrale en